CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Préliminaire

1- Soit $f : t \mapsto \dfrac{t\sin(t)}{1-\cos(t)}$, t appartenant à $]0\,,\pi]$.
Etudier la limite de f en 0.
En déduire l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt$.

2- Soit α un réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ et soit g une application 2π périodique vérifiant $\forall x \in\,]-\pi\,,\pi[\,,\; g(x) = \cos(\alpha x)$.
Déterminer la série de Fourier de g .
En déduire une expression de $\text{cotan}(\theta)$ comme somme d'une série de fonctions.

Partie I

1- Montrer que $u \mapsto \ln(\sin(u))$ et $u \mapsto \ln(\cos(u))$ sont intégrables sur $]0\,,\pi/2[$.

2- On note $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du$ et $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))du$

a- Montrer que $K = L$

b- En exprimant $K + L$ de deux manières différentes , déduire la valeur de K.

3- Exprimer I en fonction de K. En déduire la valeur de I.

Partie II

On rappelle la formule de Stirling : $n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Tournez la page S.V.P.

1- Soit $v_n = 1 - n \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

2- Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies par :

$$u_n(x) = \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \quad \text{pour x appartenant à } [0\,,\,½]$$

Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ est normalement convergente sur $[0\,,\,½]$

On note $S(x) = \displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n(x)$ et $\Sigma = \displaystyle\int_0^{1/2} S(x)dx$.

Justifier l'existence de Σ.

3- -a- Ecrire Σ sous forme d'une série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

-b- On note Σ_N la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=N} a_n$. Simplifier l'expression de Σ_N . En déduire la valeur de Σ

4- A l'aide du préliminaire, trouver une relation liant Σ et I. Retrouver la valeur de I.

Partie III

Soit h la fonction $(x\,,\,t) \mapsto \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$.

1- Montrer que l'application $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1} dt$ est continue sur [0,1].

2- Déterminer les suites $s = (s_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; s_{n+2} - 2\cos(t)\, s_{n+1} + s_n = 0$$

t étant un réel donné de $]0\,,\,\pi[$.

3- Prouver sans calcul que l'application $x \mapsto h(x,t)$, $t \in [0,\pi]$, est développable en série entière au voisinage de 0.

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$ le développement en série entière et R le rayon de convergence. En utilisant la relation :

$$(1 - 2\cos(t)\, x + x^2)\, h(x,t) = t\sin(t)\, x$$

déterminer l'expression de $a_n(t)$. Que peut-on dire de R ?

4- Soit x un réel fixé dans $[0\,,1[$.

-a- Montrer que la série $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$ converge normalement sur $[0\,,\pi]$.

-b- En déduire que H est développable en série entière au voisinage de 0.

-c- Exprimer H(x) à l'aide de fonctions élémentaires pour x appartenant à $[0\,,1[$, et retrouver la valeur de l'intégrale I.

Partie IV

1- Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x\,y'(x) + y(x) = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Résoudre (E) sur $]0\,,1[$.

2- Existe t-il une solution de (E) se prolongeant par continuité sur $[0\,,1]$?

3- Soit $\phi(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1 - x\cos(t)}\,dt$.

-a- Montrer que ϕ est une application continue sur $[0\,,1]$, dérivable sur $]0\,,1[$

-b- Montrer que ϕ est solution sur $]0\,,1[$ de (E).

-c- Retrouver la valeur de I.

_____________ Fin de l'énoncé _____________